

1. Jednoduché integrály na začátek:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx ; \int_0^3 |2x-1| dx ; \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx ; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx ; \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx ; \int_0^\infty e^{-x} dx ; \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx ; \int_1^\infty \frac{1}{x} dx .$$

2. Výpočet R -integrálu integrací per partes nebo pomocí substituce:

$$\int_0^1 x \cdot \arctg x dx ; \int_0^2 \frac{x}{1+x^4} dx ; \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2} dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx ; \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx ; \int_2^3 \frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x} dx ;$$

pozor na substituci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x} \cdot \cos x dx ; \int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\sin x} dx ; \int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx .$$

3. Integrál přes neomezený interval:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx ; \int_2^\infty \frac{1}{x \cdot \ln x} dx ; \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx ;$$

$$\text{Vyšetřete konvergenci řady : } \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln n} ; \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln^2 n} .$$

4. Aplikace určitého integrálu:

a) Vypočítejte obsah rovinné oblasti ω , která je ohraničená

i) grafem funkce $y = x^2$ a přímkou $x + y = 2$;

ii) grafy funkcí $y = x^2$ a $y = x \cdot \sin x$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$;

iii) obsah elipsy $\left\{ [x, y] ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, $a > 0$, $b > 0$.

b) i) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω kolem osy x , kde oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y = x e^x$ a $y = x$ a přímkou $x = 1$.

ii) objem koule o poloměru R .

c) Vypočítejte délku i) grafu funkce $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq a$;

ii) obvodu kružnice .

5. Užití věty o substituci a vlastností R -integrálu :

Ukažte, že platí :

i) je-li $f \in R(-a, a)$, $a > 0$, funkce lichá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

ii) je-li $f \in R(-a, a)$, $a > 0$, funkce sudá, pak $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;